

## Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales

### SUJET DE THESE

**Titre de la thèse :** Résolution d'équations non-linéaires par des méthodes de moindres carrés et application à des problèmes de contrôles optimaux et inverses.

Directeur de thèse : Arnaud Munch

Unité de rattachement : UMR 6620 – Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal

Equipe : Equations aux dérivées partielles et analyse numérique

Etablissement de rattachement : UCA

Courriel et téléphone : [arnaud.munch@uca.fr](mailto:arnaud.munch@uca.fr), 04 73 40 70 76

Co-encadrant : Jérôme Lemoine

Unité de rattachement : LMBP - UCA

#### Résumé :

Les méthodes de type moindres-carrées pour résoudre des équations et systèmes sont apparues dans les années 70. Afin de résoudre l'équation en  $u - E(u)-f=0$ , elle consiste à minimiser par un procédé itératif la fonctionnelle en  $u$   $N(E(u)-f)=0$ , où  $N$  est une norme appropriée (voir [1]).

Récemment, ce type de méthodes a été introduit pour aborder des problèmes de contrôlabilité sur des équations aux dérivées partielles d'évolution : il s'agit de déterminer une fonction contrôle menant une solution de l'équation à un état donné à un instant donné. En effet, le cadre variationnel espace-temps sous-jacent aux méthodes de type moindre carrées permet de reformuler simplement les problèmes de contrôlabilité.

Le cas d'équation linéaire est traité dans [2], [3] et [4,5] pour une équation de membrane, de la chaleur et du système de Stokes.

Le cas d'équation semilinéaire a été récemment traité dans [8,12,13,10,14] pour une équation des ondes et une équation de la chaleur. Ces travaux s'appuient notamment sur [6,7,9,11] qui proposent et analysent une méthode moindres carrés permettant d'approcher le problème direct du système de Navier-Stokes.

L'objet de la thèse est d'étudier théoriquement et numériquement le potentiel des méthodes moindres carrées pour résoudre des problèmes de contrôles pour des équations nonlinéaires. On s'intéressera notamment, en préalable du système de Navier-Stokes, à l'équation de Burgers uni-dimensionnelle, localement contrôlable par le bord. Il s'agit d'analyser la méthode, notamment la convergence du processus itératif, de proposer une méthode d'approximation et de la comparer à d'autres méthodes usuelles de point fixe en terme de stabilité et de robustesse.

Enfin, il est envisagé d'étudier le potentiel de cette approche pour résoudre des problèmes d'inverse – où il s'agit de reconstruire une solution à partir d'information partielle – qui sont duaux des problèmes de contrôlabilité.

Cette thèse requiert des compétences en analyse fonctionnelle et en calcul des variations.

## Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales

### Références

- [1] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, 2008.
- [2] A. Munch, A variational approach to approximate controls for system with essential spectrum: application to the membranal arch, Evolution equation and control theory, 2013
- [3] A. Munch, P. Pedregal, Numerical null controllability of the heat equation through a least squares and variational approach. European J. Applied Mathematics. 277-306 - 2014
- [4] A. Munch, P. Pedregal, A least-squares formulation for the approximation of null controls for the Stokes system, C. R. Acad. Sci. , 351, 2013.
- [5] A. Munch, A least-squares formulation for the approximation of null controls for the Stokes system, Mathematics of controls, Signal and System, 2015.
- [6] J. Lemoine, A. Munch, P. Pedregal, Analysis of continuous  $H^{-1}$  least-squares methods for the steady Navier-Stokes system, Applied Mathematics and Optimization, 2021
- [7] J. Lemoine, A. Munch, Resolution of the Implicit Euler scheme for the Navier-Stokes equation through a least-squares method, Numerische Mathematik, 2021
- [8] I. Gayte, J. Lemoine, A. Munch, Approximation of null controls for semilinear heat equations using a least-squares approach, ESAIM:COCV, 2021
- [9] J. Lemoine, A. Munch, A fully space-time least-squares method for the unsteady Navier-Stokes system, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2021.
- [10] A. Munch, E. Trelat, Constructive exact control of semilinear 1D wave equations by a least-squares approach, SICON 2022.
- [11] J. Lemoine, A. Munch Least-squares approaches for the 2D Navier-Stokes system, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, 2022
- [12] J. Lemoine, A. Munch, Constructive exact control of semilinear 1D heat equations, AIMS: Mathematical control and related fields, 2022
- [13] S. Ervedoza, J. Lemoine, A. Munch, Exact controllability of semilinear heat equations through a constructive approach, Evolution equations and control theory, 2022
- [14] K. Bhandari, J. Lemoine, A. Munch, Exact controllability of a 1D semilinear wave equation through a constructive approach, Submitted.