SUJET DE THESE

Titre de la thèse : Calcul fonctionnel des semigroupes sous-markoviens sur des espaces Lp à poids, et extrapolation L2 vers Lp des multiplicateurs spectraux

Directeur de thèse : Christoph Kriegler
Unité de rattachement : Laboratoire de mathématiques Blaise Pascal
Equipe : Probabilités, Analyse, Statistiques
Etablissement de rattachement : UFR de mathématiques, Université Clermont Auvergne
Courriel et téléphone : christoph.kriegler@uca.fr et 06 63 98 66 91
Co-encadrant éventuel : ---
Unité de rattachement : ---
Etablissement de rattachement : ---

Résume :

Le calcul fonctionnel d'un opérateur A fermé défini sur un espace de Banach est le problème d'une part de définir de façon cohérente un opérateur borné m(A) pour m appartenant à une classe de fonctions définies typiquement au moins sur le spectre de A ; et d'autre part d'obtenir un contrôle de la norme d'opérateurs de m(A) en termes d'une norme de fonction de m convenable.
Si A est le générateur d'un semigroupe markovien ou sous-markovien sur l'espace de Banach L^p(X), alors par des résultats de [Elias Stein 1970], [Cowling 1983], [Meda 1990] et [Carbonaro-Dragicevic 2017], on sait que m(A) est bien défini pour m une fonction holomorphe bornée définie sur un secteur autour du demi-axe positif. L'angle du secteur dépend de l'exposant de Lebesgue 1 < p < °°. Comme on a de plus une estimation de la norme de m(A) par une constante fois la norme sup de m sur ce secteur, on obtient alors un calcul fonctionnel holomorphe (dit H°°) pour ces générateurs de semigroupes (sous-)markoviens. Ce calcul fonctionnel est d'une grande importance tant au niveau de l'analyse théorique : il implique des résultats en théorie ergodique du semigroupe tels que des estimations maximales et convergence du semigroupe exp(-tA) pour t → °° et pour t → 0, et en analyse harmonique tels que les fonctions carrées. Tant au niveau de l'analyse des EDP : il implique la régularité maximale du générateur A, et était un ingrédient principal de la résolution de la conjecture de Kato [Auscher Hofmann Lacey McIntosh Tchamitchian 2002 Annals of Math.].
Plus récemment, [Duong-Sikora-Yan 2011], [Gong-Yan 2014] resp. [Domelevo-Kriegler-Petermichl 2021] ont étudié le calcul fonctionnel des générateurs de semigroupes pour lesquelles on a a priori une information sur l'espace L^p(X,\mu) (estimation Gaussienne du noyau d'intégration du semigroupe resp. sous-markovianité), mais avec le but d'obtenir m(A) borné sur un espace L^p (resp. L^2) à poids : L^p(X,w d\mu). De tels espaces apparaissent naturellement dans des problèmes de changement de variables.
Du point de vue de l'analyse harmonique, la question de bornitude d'un opérateur T sur un espace L^p(X,w d\mu) pour p = 2 fixé et pour toute une classe de poids w suffisamment riche

(classe de Muckenhoupt dans le cas $X = R^n$) est plus forte que la bornitude sur $L^p(X,\mu)$ pour tout $1 < p <$ °°.
Nous nous proposons dans ce projet de thèse d'étudier quels semigroupes sous-markoviens admettent un calcul fonctionnel H°° sur $L^p(X,d\mu)$ et pour quels exposants p et quels poids w. Comme exemple d'un tel semigroupe nous guidera en première ligne le semigroupe de Ornstein-Uhlenbeck sur $L^p(R^n,\mu)$ avec mesure Gaussienne μ, qui est un des semigroupes les plus importants qui n'admet pas d'estimation Gaussienne du noyau d'intégration du semigroupe et qui est pourtant sous-markovienne. Jouera un rôle des estimations sur $Lp(X, w\, d\mu)$ de l'opérateur maximal du semigroupe $Mf(x) = \sup_{t>0}|\exp(-tA)f(x)|$, à trouver.
Une deuxième question du projet de thèse allant plus loin est dans quelle mesure la théorie d'extrapolation de Rubio de Francia qui est bien établie pour des poids w de Muckenhoupt et qui permet d'étendre un opérateur agissant sur des $L^2(X,w\, d\mu)$ à un opérateur agissant sur des $L^p(X,w\, d\mu)$, est toujours valable pour les opérateurs et poids provenant de notre cadre de semigroupes.