École Doctorale des Sciences Fondamentales

SUJET DE THÈSE

Titre de la thèse :

Arithmétique des variétés abéliennes sur les corps de fonctions et applications

Directeur de thèse : Nicolas Billerey.
Unité de rattachement : Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal (UMR 6620).
Équipe : Théorie des Nombres.
Établissement de rattachement : Université Clermont Auvergne.
Courriel : `nicolas.billerey@uca.fr`.
Téléphone : 04 73 40 76 32.
Co-encadrant éventuel : Richard Griffon (`richard.griffon@uca.fr`).
Unité de rattachement : Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal.
Établissement de rattachement : Université Clermont Auvergne.

Résumé :

L'étude des équations diophantiennes est un domaine de recherche à la fois ancien et très actif de la théorie des nombres. Ces problèmes sont généralement approchés par une combinaison de méthodes issues de diverses branches des mathématiques fondamentales. Mentionnons parmi celles-ci l'emploi de théorèmes de modularité pour certaines représentations galoisiennes, et l'exploitation de résultats concernant des fonctions L. On s'attache dans ce travail de thèse à obtenir des résultats explicites sur certaines variétés abéliennes, qui pourront être exploités dans des situations diophantiennes concrètes. Détaillons à présent les thématiques qui y seront abordées, naturellement séparées en deux volets.

En théorie des équations diophantiennes, la méthode modulaire désigne l'approche employée par Wiles en 1995 pour démontrer le dernier théorème de Fermat. Celle-ci exploite en particulier des résultats profonds liés à l'arithmétique des points d'ordre fini des courbes elliptiques rationnelles et établit un lien important entre ces courbes elliptiques ou leurs représentations galoisiennes et les formes modulaires.

Cette méthode a depuis connu de très nombreuses extensions. En 2000, Darmon a initié un ambitieux programme d'étude des équations de Fermat généralisées dans lequel les courbes elliptiques rationnelles sont remplacées par des variétés abéliennes définies sur des corps de fonctions. Cette approche est à ce jour encore largement conjecturale, mais les progrès récents en géométrie arithmétique et notamment les nouveaux théorèmes de relèvement modulaire pour les représentations galoisiennes ont permis d'obtenir les premiers résultats diophantiens inconditionnels à partir de cette approche. Ainsi, la méthode de Darmon, combinée à des résultats profonds de géométrie arithmétique de Breuil et Diamond, a récemment permis de démontrer des propriétés de modularité pour les jacobiennes des courbes hyperelliptiques associées, par Kraus, aux solutions des équations de Fermat de signature (r, r, p).

Ce projet de thèse s'inscrit notamment dans cette dynamique et vise à étendre le champ d'action des méthodes modulaires pour la résolution d'équations diophantiennes en étudiant l'arithmétique de certaines variétés abéliennes définies sur des corps de fonctions inspirées par le programme de Darmon.

D'autres questions liées à la modularité des représentations galoisiennes associées à des courbes elliptiques et variétés abéliennes définies sur des corps de nombres pourront également être abordées dans l'optique d'étudier certaines équations de Fermat généralisées.

Les fonctions L sont des objets d'importance cruciale en théorie des nombres et en géométrie diophantienne. En effet, les propriétés analytiques de ces fonctions encodent (ou devraient, conjecturalement, encoder) des informations arithmétiques et géométriques des objets auxquels elles sont associées. Ce volet du projet se concentre plus

spécifiquement sur les fonctions L des variétés abéliennes sur les corps globaux (corps de nombres, ou corps de fonctions sur un corps fini).

Dans ce cadre, la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer (BSD) prédit un lien profond entre le comportement de $L(A, s)$ au voisinage de $s = 1$ et certains invariants arithmétiques de la variété abélienne A. Parmi ces invariants, mentionnons le rang du groupe des points rationnels sur A, le régulateur de Néron–Tate de A, et l'ordre de son groupe de Tate–Shafarevich. Ces quantités restent encore mal comprises : en particulier, les déterminer explicitement est un problème difficile en général. Les relations fournies par la conjecture de BSD permettent ainsi d'espérer estimer ces quantités par des moyens analytiques et, partant, de mieux décrire l'arithmétique de A. Dans cette optique, il semble pertinent de décrire la répartition des zéros de la fonction $L(A, s)$ au voisinage de $s = 1$.

Les techniques de moyenne développées tout récemment ont ouvert de nombreuses possibilités pour l'étude de problèmes de type « statistique arithmétique ». Et ce, à la fois avec des méthodes analytiques, par exemple dans la suite des travaux de Radziwiłł–Soundararajan qui décrivent modulo la conjecture de BSD, la distribution de l'ordre du groupe de Tate–Shafarevich dans une suite de tordues quadratiques sur $\mathbb{Q}$. Mais aussi avec des méthodes plus arithmético-géométriques, dans la lignée des travaux de Bhargava, Shankar et leurs collaborateurs, qui démontrent que 100% des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ sont de rang ≤ 1.

Ce projet s'inscrit dans ce mouvement, en ce qu'il se propose d'étudier des questions liées à la répartition des zéros de $L(A, s)$ autour de $s = 1$, en moyenne lorsque A parcourt une famille naturelle de variétés abéliennes. Divers types de familles sont envisagées : les familles « à un paramètre » pour commencer, puis les familles de tordues quadratiques qui sont d'un grand intérêt arithmétique, ou encore la famille de toutes les courbes elliptiques. On s'attachera notamment à majorer en moyenne l'un des invariants quantifiant la présence ou l'absence de grappes de zéros de $L(A, s)$ autour de $s = 1$.

Une fois de tels résultats analytiques obtenus, on pourra chercher à en tirer des corollaires concernant les invariants arithmétiques des variétés abéliennes en supposant vraie la conjecture de BSD. Ceci devrait venir compléter un corpus grandissant de résultats statistiques sur l'arithmétique des variétés abéliennes.

Au delà des contributions que le mémoire de thèse pourra apporter à la recherche fondamentale en géométrie diophantienne, l'étude de ces thèmes fournira à l'étudiant·e une large panoplie de techniques utilisées à la fois pour étudier certaines familles d'équations diophantiennes mais aussi pour développer ses propres outils, une double compétence assez rare dans la communauté.

Le projet proposé comporte des objectifs à moyen et long termes et devrait ainsi pouvoir déboucher sur la rédaction d'articles et leur soumission pendant la durée du contrat doctoral.

Enfin, l'étudiant·e accueilli·e bénéficiera des nombreuses relations scientifiques entre les membres de l'équipe de Théorie des Nombres de Clermont-Ferrand et leurs collègues en France (par exemple, à Paris, Bordeaux, Grenoble ou Lyon) et à l'étranger (au Canada, aux États-Unis, au Chili, au Danemark et en Espagne, notamment).

Directeur : Pr Yanick Heurteaux
tél. 04.73.40.50.64
E-mail : yanick.heurteaux@uca.fr

Secrétariat : Lucie Naud
tél. 04.73.40.53.76
E-mail : edsf.drv@uca.fr