Ecole Doctorale des Sciences Fondamentales

SUJET DE THESE

Titre de la thèse : Universalité des séries de Dirichlet générales

Directeur de thèse : Frédéric Bayart
Unité de rattachement : LMBP
Equipe : PAS
Etablissement de rattachement : Université Clermont Auvergne
Courriel et téléphone : frederic.bayart@uca.fr, 0473407094
Co-encadrant éventuel :
Unité de rattachement :
Etablissement de rattachement :

Résumé :

Depuis presqu'un siècle, on sait d'après des travaux de Birkhoff qu'il existe des fonctions entières f universelles au sens des translations : si g est une autre fonction entière, il existe une suite d'entiers (n_k) telle que les translatées f(•+n_k) convergent uniformément vers g sur tout compact. L'existence d'une telle fonction f est obtenue par des moyens topologiques et on ne connait pas « explicitement » de fonctions ayant cette propriété.

Ceci devient différent si on travaille sur une bande au lieu de travailler sur le plan complexe. Un résultat remarquable de S. Voronin implique l'universalité de la fonction Zeta de Riemann dans sa bande critique. Rappelons que cette fonction est définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. La série converge sur le demi-plan Re(s)>1, et cette fonction peut-être prolongée holomorphiquement au plan complexe avec un pôle simple en 1. La bande critique Ω est l'ensemble des nombres complexes s pour lesquels ½<Re(s)<1. Le théorème de Voronin affirme que, pour toute fonction holomorphe g dans Ω et ne s'annulant pas dans Ω, pour tout compact K contenu dans Ω, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $\|\zeta(s+in) - g(s)\|_{C(K)} < \varepsilon$. La démonstration de Voronin est un formidable mélange d'outils provenant des probabilités, de l'analyse complexe, de la théorie analytique des nombres, et de la géométrie des espaces de Hilbert. Remarquons que, si on espère que l'hypothèse de Riemann est vérifiée, on ne peut pas de passer de l'hypothèse que g ne s'annule pas dans Ω.

Depuis les travaux de Voronin, de nombreux mathématiciens ont identifié d'autres séries de Dirichlet ayant le même type de propriété d'universalité. C'est le cas par exemple des fonctions de Lerch : celles-ci peuvent s'écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda n}(n+\alpha)^{-s}$ où α est un nombre transcendant et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour ces fonctions, la propriété d'universalité est vérifiée dans la même bande, mais on ne demande plus à ce que les fonctions approchées ne s'annulent pas. Remarquons ici qu'il y a une grande différence suivant que $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou non : si c'est le cas, comme pour la fonction Zêta, 1 est un pôle de la fonction de Lerch, alors que dans le cas contraire, la série de Dirichlet définissant la fonction de Lerch converge (mais pas absolument) dans la bande Ω. Ce dernier

cas est plus facile, car la convergence de la série permet d'obtenir avec moins d'efforts des estimations de la fonction dans la bande critique.

Très récemment, on s'est intéressé à l'universalité des séries de Dirichlet dans un contexte très général : si $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n \exp(-\lambda_n s)$ est une série de Dirichlet convergeant quelque part, quelles positions suffit-il d'imposer sur les suites (a_n) et (λ_n) pour que D soit universelle dans une certaine bande (à définir en fonction des propriétés de D) ? Un résultat général a été démontré, qui permet par exemple de démontrer l'universalité des fonctions du type $D(s) = \sum_{n\geq 1} Q(n) e^{2i\pi\lambda n} (P(n))^{-s}$ où P et Q sont des polynômes avec deg(Q)=deg(P)-1 et λ n'est pas un entier.

Si l'on compare ce résultat avec celui obtenu pour les fonctions de Lerch, on voit qu'il ne couvre pas le cas le plus difficile, c'est-à-dire celui où $\lambda = 0$. Le premier objectif de la thèse sera d'étudier ce cas. On sait alors que la série de Dirichlet D admet un pôle et que l'universalité ne pourra être démontrée que pour un prolongement analytique de D au-delà de ce pôle. Il faudra donc mélanger les techniques de théorie analytique des nombres issues de l'étude des fonctions de Lerch avec les méthodes issues des probabilités et de l'analyse fonctionnelle pour surmonter cette difficulté.

Dans un deuxième temps, le doctorant pourra se consacrer à d'autres séries de Dirichlet classiques dont on ne sait si elles sont universelles. L'exemple le plus intriguant est celui de la série alternée des nombres premiers, c'est-à-dire la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n {p_n}^{-s}$ où (p_n) est la suite des nombres premiers. Suivant l'évolution des travaux et l'intérêt du candidat, d'autres problèmes pourront être abordés, ou bien autour d'autres problèmes d'universalité, ou bien autour de l'étude des séries de Dirichlet.